

Cinématique du SOLIDE INDÉFORMABLE

Cinématique plane : Résolution graphique

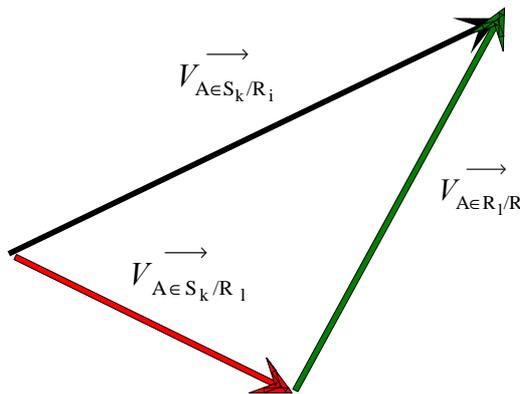
Sommaire

1. COMMENT RESOUDRE LA CINEMATIQUE D'UN MECANISME PAR UNE RESOLUTION GRAPHIQUE ?	2
1.1. RESUME DES SAVOIRS DANS LE BUS D'UNE ETUDE DE CINEMATIQUE D'UN MECANISME EN RESOLUTION GRAPHIQUE	2
1.1.1. Expliciter (formuler) les constructions issues de la relations $\vec{V}_{A \in Sk/Ri} = \vec{V}_{A \in Sk/RI} + \vec{V}_{A \in RI/Ri}$:	2
1.1.2. Expliciter (formuler) les constructions issues de la relations $\vec{V}_{A \in Sk/Ri} = \vec{V}_{B \in Sk/RI} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{Sk/RI}$:	2
1.2. PRESENTATION DU MECANISME	4
1.3. SCHEMA CINEMATIQUE DU MECANISME ET OBJECTIF DE L'ETUDE	4
1.3.1. L'objectif nous interpelle	4
1.4. DONNEES ET GRAPHE DES STRUCTURES DU MECANISME	5
1.4.1. Les solides	5
1.4.2. Les liaisons entre solides	5
1.4.3. La cinématique est-elle résoluble ?	5
1.4.3.1 La mobilité	5
1.4.3.2 Le nombre d'équations cinématiques obtenues par composition de mouvement	5
1.4.3.3 Le nombre d'inconnues cinématiques	5
1.4.3.4 Le nombre d'inconnues cinématiques effectives	5
1.4.3.5 Conclusion sur la possibilité de résolution	5
1.4.4. Traduction et modélisation vectorielle du mécanisme (analyse vectorielle du mécanisme)	5
1.4.5. Tracer de l'épure	6
1.4.6. Inventorier l'état des connaissances cinématiques du mécanisme	7
1.5. METHODE DE RESOLUTION PAR LA CINEMATIQUE RESOLUTION GRAPHIQUE	7
1.6. EPURE TRADUISANT LA GEOMETRIQUE ET LES VECTEURS VITESSES	9

1. COMMENT RESOUDRE LA CINEMATIQUE D'UN MECANISME PAR UNE RESOLUTION GRAPHIQUE ?

1.1. Résumé des savoirs dans le bus d'une étude de cinématique d'un mécanisme en résolution graphique

1.1.1. Expliciter (formuler) les constructions issues de la relations $\vec{V}_{A \in S_k / R_i} = \vec{V}_{A \in S_k / R_l} + \vec{V}_{A \in R_l / R_i}$:



Composition de mouvement

Tracer d'une somme vectorielle simple.

Attention, si le savoir est simple, son utilisation pose souvent des problèmes de compréhension.

1.1.2. Expliciter (formuler) les constructions issues de la relations $\vec{V}_{A \in S_k / R_i} = \vec{V}_{B \in S_k / R_i} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{S_k / R_i}$:

Les données sont : La vitesse $\vec{V}_{A \in S_k / R_i}$ et la direction de la vitesse $\vec{V}_{B \in S_k / R_i}$

- 1-Tracer de $\vec{V}_{B \in S_k / R_i}$: (tracer en rouge)

$\vec{V}_{A \in S_k / R_i} = \vec{V}_{B \in S_k / R_i} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \Leftrightarrow \vec{V}_{A \in S_k / R_i} \cdot \vec{AB} = \vec{V}_{B \in S_k / R_i} \cdot \vec{AB}$ traduit que la projection orthogonale de $\vec{V}_{A \in S_k / R_i}$ sur la direction de \vec{AB} est égale à la projection orthogonale de $\vec{V}_{B \in S_k / R_i}$ sur la direction de \vec{AB} .

- Rechercher le Centre instantané de rotation du mouvement de S_k / R_i : (tracer en bleu)

$$\vec{V}_{A \in S_k / R_i} = \underbrace{\vec{V}_{I \in S_k / R_i}}_0 + \vec{AI} \wedge \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \text{ d'où } \vec{V}_{A \in S_k / R_i} \perp \vec{AI} \text{ et}$$

$$\vec{V}_{B \in S_k / R_i} = \underbrace{\vec{V}_{I \in S_k / R_i}}_0 + \vec{BI} \wedge \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \text{ d'où } \vec{V}_{B \in S_k / R_i} \perp \vec{BI}$$

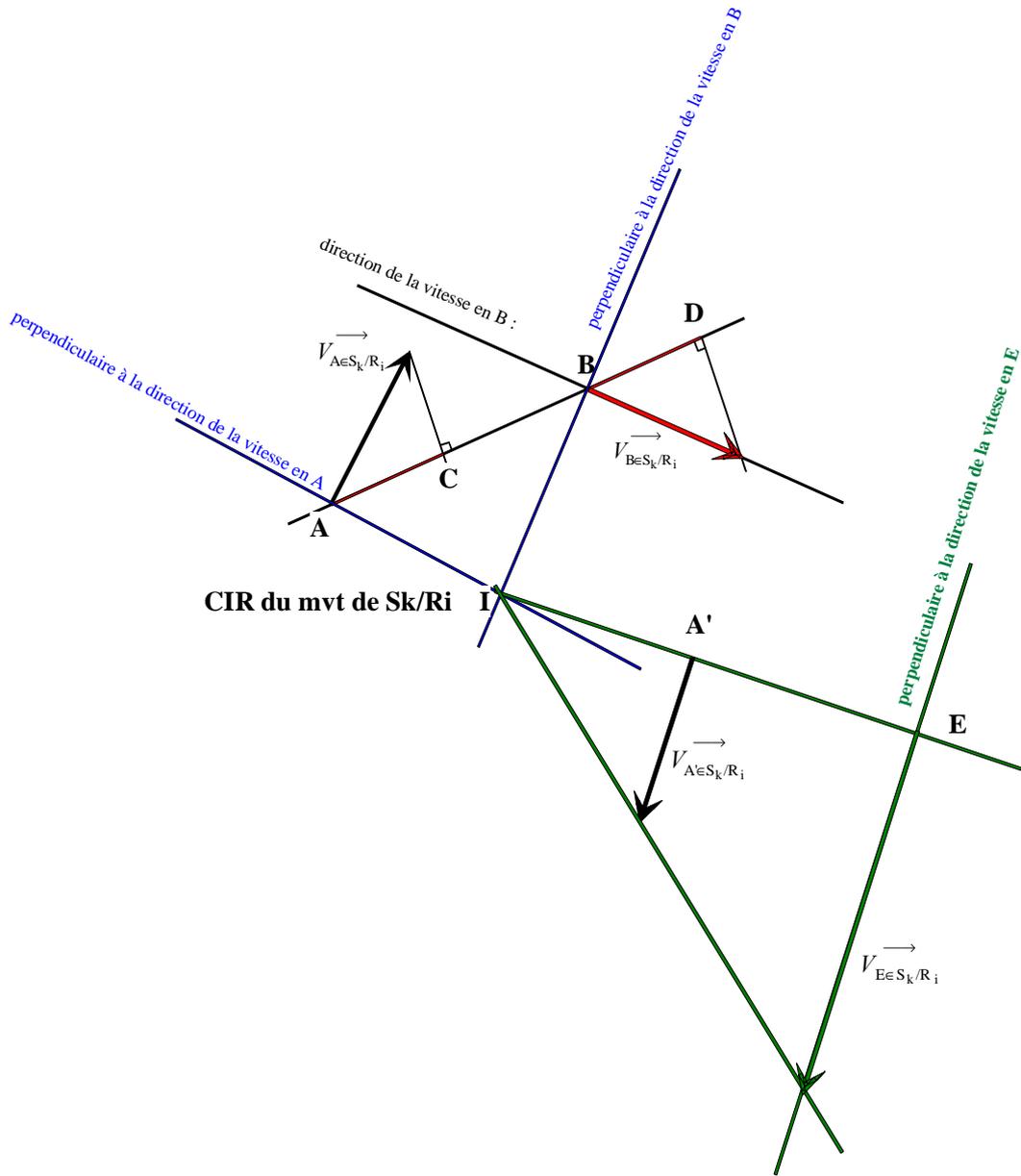
le point I se trouve à l'intersection de ces deux droites.

- Recherche de la vitesse d'un point E quelconque du plan, $\vec{V}_{E \in S_k / R_i}$

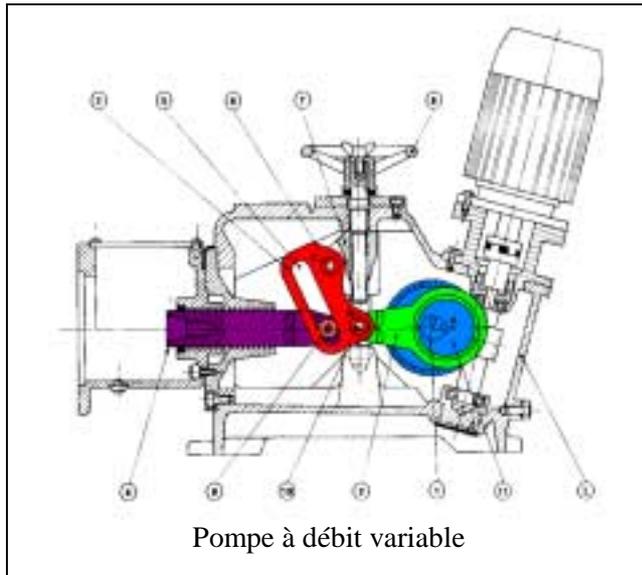
$$\vec{V}_{E \in S_k / R_i} = \underbrace{\vec{V}_{I \in S_k / R_i}}_0 + \vec{EI} \wedge \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \text{ d'où } \vec{V}_{E \in S_k / R_i} \perp \vec{EI} \text{ et en prenant un point A' sur la droite IE tel}$$

que $\|\vec{IA'}\| = \|\vec{IA}\|$, la vitesse de A' est perpendiculaire à la droite IA

$$\vec{V}_{A \in S_k / R_i} = \underbrace{\vec{V}_{I \in S_k / R_i}}_0 + \vec{AI} \wedge \vec{\Omega}_{S_k / R_i} \text{ d'où } \vec{V}_{A \in S_k / R_i} \perp \vec{AI} \text{ et } \frac{\|\vec{V}_{A \in S_k / R_i}\|}{\|\vec{V}_{B \in S_k / R_i}\|} = \frac{\|\vec{I_{ki}A}\|}{\|\vec{I_{ki}B}\|}$$



1.2. Présentation du mécanisme

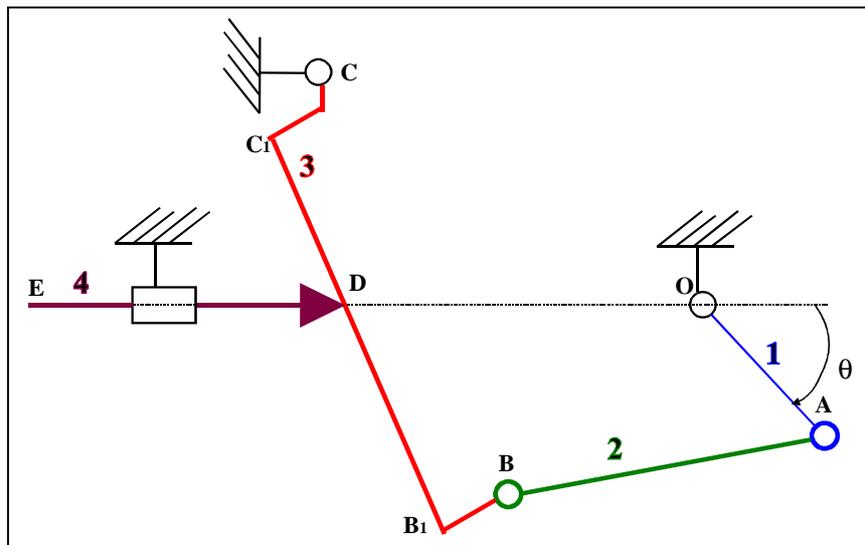


L'excentrique 1 a un mouvement de rotation autour de l'axe en O perpendiculaire au plan de la figure ci-contre. ($\omega=60rd/s$) Il met ainsi en mouvement la bielle 2 qui commande la translation du piston 4 par l'intermédiaire du balancier 3 articulé autour du point C.

Le réglage du débit est réalisé en faisant varier la position du point C en agissant sur le volant 8.

Dans la suite, nous considérerons que le volant 8 est fixe.

1.3. Schéma cinématique du mécanisme et objectif de l'étude



Le schéma cinématique proposé ci- dessous est simplifié. Le galet 9 est supprimé

L'objectif de l'étude est de déterminer la vitesse du piston lors que l'excentrique 1 tourne à la fréquence de rotation de $\omega=60rd/s$ à l'instant t ou $\theta=30^\circ$.

1.3.1. L'objectif nous interpelle

En effet, notre savoir en cinématique est essentiellement vectoriel, et l'énoncé de l'objectif ne fait apparaître qu'un schéma cinématique et un scalaire $\omega=60rd/s$.

La difficulté se situe dans la transformation du schéma cinématique en un système d'équations vectorielles et dans la traduction des données et de l'objectif en vecteurs.

En effet, il est nécessaire de connaître un vecteur vitesse et plus précisément dans ce cas la

vitesse $\vec{V}_{A \in 2/1}$. On utilisera la relation du champ antisymétrique $\vec{V}_{A \in 1/0} = \vec{V}_{O \in 1/1} + \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$.

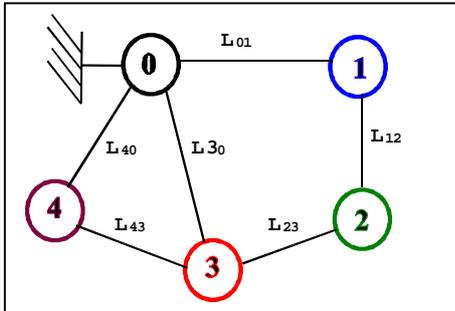
L'objectif visé est la détermination à l'instant t ($\theta=30^\circ$) de $\vec{V}_{E \in 4/0}$.

1.4. Données et Graphe des structures du mécanisme

1.4.1. Les solides

Les différents solides sont toujours représentés de différentes couleurs.

1.4.2. Les liaisons entre solides



Mécanisme plan d'où :

1. L_{01} : Liaison pivot (articulation) en 0 (1 degré de liberté)
2. L_{12} : Liaison pivot (articulation) en A
3. L_{23} : Liaison pivot (articulation) en B
4. L_{34} : Liaison ponctuelle en D de ligne de contact B_1C_1
5. L_{30} : Liaison pivot (articulation) en C
6. L_{40} : Liaison glissière de direction DE

1.4.3. La cinématique est-elle résoluble ?

Rappel : la cinématique est l'étude des mouvements en fonction des mobilités. Ces mobilités seront déterminées lors de l'étude de dynamique.

1.4.3.1 La mobilité

Le mécanisme présenté ci-dessus possède une mobilité : $(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$, d'où $m=1$ (un moteur pour animé le mécanisme)

1.4.3.2 Le nombre d'équations cinématiques obtenues par composition de mouvement

E_c = nombre d'équations = 3 fois le nombre cyclomatique $\gamma=2$ (nombre de boucle indépendante du graphe de structure)

$$E_c = 6$$

1.4.3.3 Le nombre d'inconnues cinématiques

I_c = somme des degrés de liberté de chaque liaison

1. L_{01} : Liaison pivot (articulation) en 0 (1 degré de liberté)
2. L_{12} : Liaison pivot (articulation) en A (1 degré de liberté)
3. L_{23} : Liaison pivot (articulation) en B (1 degré de liberté)
4. L_{34} : Liaison ponctuelle en D de ligne de contact B_1C_1 (2 degré de liberté)
5. L_{30} : Liaison pivot (articulation) en C (1 degré de liberté)
6. L_{40} : Liaison glissière de direction DE (1 degré de liberté)

$$D'où I_c = 7$$

1.4.3.4 Le nombre d'inconnues cinématiques effectives

Le nombre d'inconnues cinématiques effectives I_{cp} est égale à I_c moins la mobilité m servant de paramètre du mouvement.

$$I_{cp} = I_c - m = 6$$

1.4.3.5 Conclusion sur la possibilité de résolution

Le degré d'hyperstatisme h , est égale au nombre d'inconnues effectives I_{cp} moins le nombre d'équations E_c .

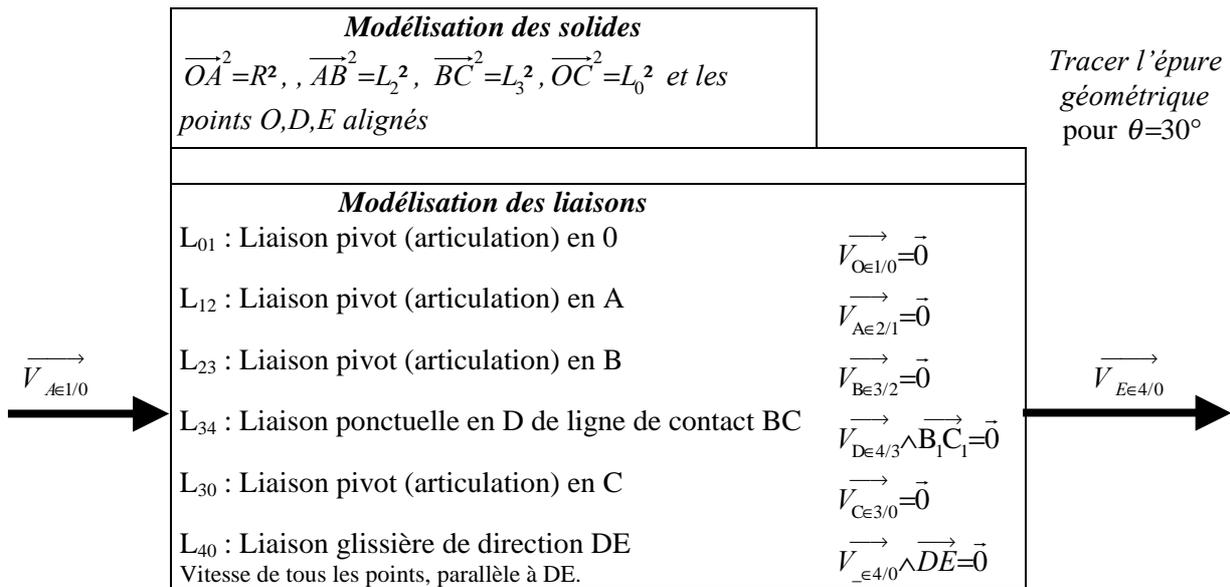
H est un entier négatif ou nul, $h \leq 0$. S'il est nul alors le système est résoluble.

$$h = I_c - m - E_c, \text{ ici } h=0$$

Conclusion : la cinématique du mécanisme présentée ci-dessus est résoluble.

1.4.4. Traduction et modélisation vectorielle du mécanisme (analyse vectorielle du mécanisme)

Un mécanisme est un ensemble de solides et de liaisons. D'où la représentation ci-dessous :



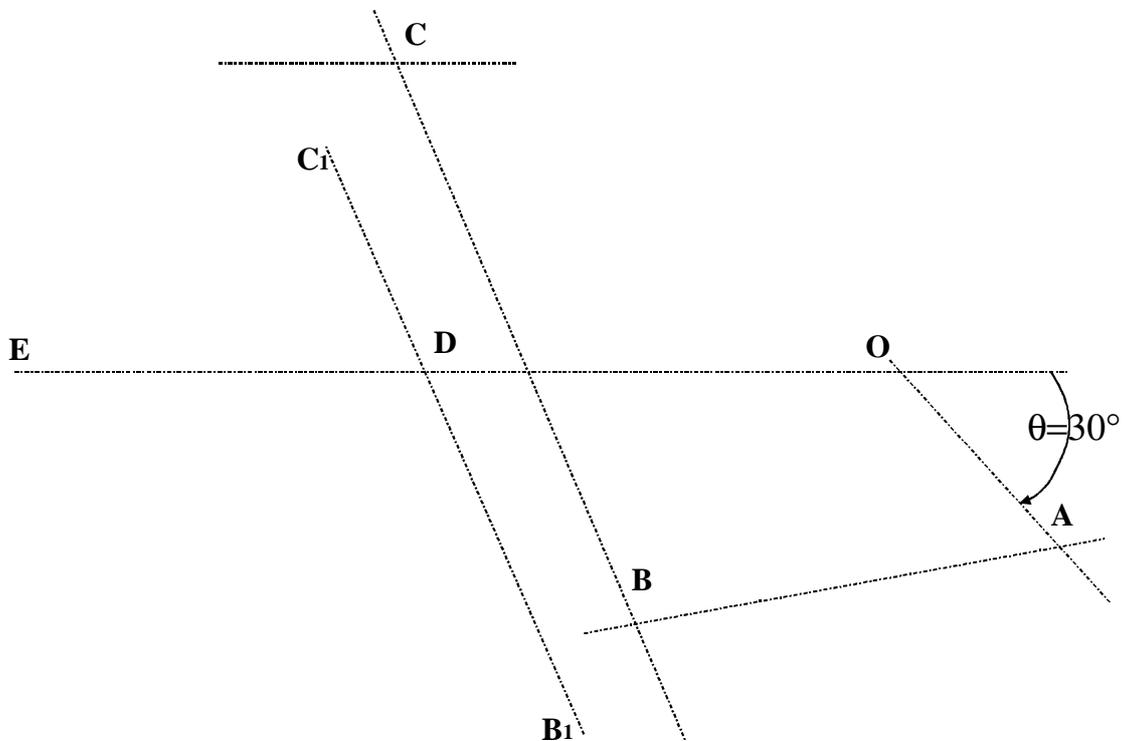
Calcul de $\vec{V}_{A \in 1/0}$.

$$\vec{V}_{A \in 1/0} = \underbrace{\vec{V}_{O \in 1/0}}_{\vec{0}} + \overline{AO} \wedge \overline{\Omega}_{1/0} \text{ d'où } \vec{V}_{A \in 1/0} \perp \overline{AO} \text{ et } \|\vec{V}_{A \in 1/0}\| = R \cdot \omega$$

1.4.5. Tracer de l'épure

Choisir une échelle géométrique : (1cm correspond à 1 mm par exemple) puis tracer l'épure.

Modélisation géométrique des solides



1.4.6. Inventorier l'état des connaissances cinématiques du mécanisme

Sous forme de tableau : l'état des connaissances cinématiques du mécanisme

Mouvement	CIR	Une Vitesse en un point	La direction d'une vitesse
1/0	O	$\vec{V}_{A \in 1/0}$	
2/0			
3/0	C		
4/0			

Remarques :

- si on connaît le CIR et la vitesse en un point dans le mouvement considéré, alors la cinématique dans ce mouvement est entièrement connue.
Le mouvement 1/0 est donc ici totalement connu.
- si on connaît la vitesse en un point et la direction d'une vitesse en un point dans le mouvement considéré, alors la cinématique dans ce mouvement est entièrement connue.

1.5. Méthode de résolution par la cinématique résolution graphique

1- Calculer numériquement $\|\vec{V}_{A \in 1/0}\| = R \cdot \omega$ et $\vec{V}_{A \in 1/0} \perp \vec{AO}$

2-Tracer à l'échelle des vitesses (1 cm correspond à 1m/s par exemple) la vitesse $\vec{V}_{A \in 1/0}$.

3- reprendre le tableau des liaisons ci-dessous et rechercher un 1 dans les indices des vitesses non déjà utilisées

$\vec{V}_{A \in 1/0}$	L ₀₁ : Liaison pivot (articulation) en O	$\vec{V}_{O \in 1/0} = \vec{0}$	Utilisée en 1
	L ₁₂ : Liaison pivot (articulation) en A	$\vec{V}_{A \in 2/1} = \vec{0}$	Utilisée en 4
	L ₂₃ : Liaison pivot (articulation) en B	$\vec{V}_{B \in 3/2} = \vec{0}$	Utilisée en 5
	L ₃₄ : Liaison ponctuelle en D de ligne de contact BC	$\vec{V}_{D \in 4/3} \wedge \vec{B_1C_1} = \vec{0}$	
	L ₃₀ : Liaison pivot (articulation) en C	$\vec{V}_{C \in 3/0} = \vec{0}$	
	L ₄₀ : Liaison glissière de direction DE Vitesse de tous les points, parallèle à DE.	$\vec{V}_{E \in 4/0} \wedge \vec{DE} = \vec{0}$	$\vec{V}_{E \in 4/0}$

Seule, $\vec{V}_{A \in 2/1} = \vec{0}$ est sélectionnable par ce critère et « y injecter du 0 » d'où

$$\vec{V}_{A \in 2/0} = \vec{V}_{A \in 2/1} + \vec{V}_{A \in 1/0} \Rightarrow \vec{V}_{A \in 2/0} = \vec{V}_{A \in 1/0}, \text{ l'indiquée sur l'épure.}$$

4- remplir le tableau de l'état des connaissances cinématiques du mécanisme

Mouvement	CIR	Une Vitesse en un point	La direction d'une vitesse
1/0	O	$\vec{V}_{A \in 1/0}$	
2/0		$\vec{V}_{A \in 2/0}$	$\vec{V}_{B \in 2/0}$
3/0	C	$\vec{V}_{B \in 3/0}$	
4/0	Pas de CIR	$\vec{V}_{D \in 4/0}$	

On remarque, qu'il est nécessaire se rechercher la direction d'une vitesse dans le mouvement de 2/0.

5- Reprendre le tableau des liaisons ci-dessous et rechercher un 2 dans les indices des vitesses non déjà utilisées.

Seule, $\vec{V}_{B \in 3/2} = \vec{0}$ est sélectionnable par ce critère et « y injecter du 0 »

d'où $\vec{V}_{B \in 3/0} = \vec{V}_{B \in 3/2} + \vec{V}_{B \in 2/0} \Rightarrow \vec{V}_{B \in 3/0} = \vec{V}_{B \in 2/0}$, l'indiquée sur l'épure.

La vitesse $\vec{V}_{B \in 3/0} = \underbrace{\vec{V}_{C \in 3/0}}_0 + \vec{BC} \wedge \vec{\Omega}_{3/0}$ d'où $\vec{V}_{B \in 3/0} \perp \vec{BC}$, l'indiquée sur l'épure.

La cinématique du mouvement de 2/0 étant entièrement déterminée, on peut écrire la relation :

$$\vec{V}_{A \in 2/0} \cdot \vec{AB} = \vec{V}_{B \in 2/0} \cdot \vec{AB} \text{ et tracer l'équiprojectivité du champs des vitesses dans la mouvement de 2/0.}$$

Voir épure.

La cinématique du mouvement de 3/0 est maintenant entièrement déterminée.

6- Reprendre le tableau des liaisons ci-dessous et rechercher un 3 dans les indices des vitesses non déjà utilisées.

Seule, $\vec{V}_{D \in 4/3}$ est sélectionnable par ce critère et « y injecter du 0 ». d'où la relation :

$$\vec{V}_{D \in 4/0} = \vec{V}_{D \in 4/3} + \vec{V}_{D \in 3/0}$$

Inventaire des inconnues dans la relation : $\vec{V}_{D \in 4/0} = \vec{V}_{D \in 4/3} + \vec{V}_{D \in 3/0}$

- $\vec{V}_{D \in 4/0}$: la direction est connue, voir tableau des liaisons : $\vec{V}_{D \in 4/0} \wedge \vec{DE} = \vec{0}$. La norme est inconnue.
- $\vec{V}_{D \in 4/3}$: la direction est connue, voir tableau des liaisons : $\vec{V}_{D \in 4/3} \wedge \vec{B_1C_1} = \vec{0}$. La norme est inconnue.
- $\vec{V}_{D \in 3/0}$: Le mouvement de 3/0 étant déterminé, la vitesse $\vec{V}_{D \in 3/0}$ peut être déterminée par les propriétés géométriques de la relation : $\vec{V}_{D \in 3/0} = \vec{V}_{B \in 3/0} + \vec{DB} \wedge \vec{\Omega}_{3/0}$. (voir épure des vitesses)

En traduisant graphiquement la relation vectorielle $\vec{V}_{D \in 4/0} = \vec{V}_{D \in 4/3} + \vec{V}_{D \in 3/0}$, on obtient $\vec{V}_{D \in 4/0}$.

Méthode : tracer la droite parallèle à $\vec{V}_{D \in 4/3}$ passant par extrémité du vecteur $\vec{V}_{D \in 3/0}$ connu, et tracer la droite parallèle à $\vec{V}_{D \in 4/0}$ passant par l'origine du vecteur $\vec{V}_{D \in 3/0}$ connu. On obtient un triangle, les sens des vitesses sont donnés par la relation vectorielle : $\vec{V}_{D \in 4/0} = \vec{V}_{D \in 4/3} + \vec{V}_{D \in 3/0}$.

7- $\vec{V}_{D \in 4/0} = \vec{V}_{E \in 4/0}$ donnée par la liaison L_{40} : Liaison glissière de direction DE

8- AFFICHER LE RESULTAT

- Mesurer la norme de la vitesse $\vec{V}_{D \in 4/0}$ et faire la transformée inverse le l'échelle des vitesses.
- Donner la direction de $\vec{V}_{D \in 4/0}$

Encadrer le résultats : $\left\| \vec{V}_{E \in 4/0} \right\| = x \text{ m/s et } \vec{V}_{E \in 4/0} \wedge \vec{DE} = \vec{0}$

1.6. Epure traduisant la géométrie et les vecteurs vitesses

